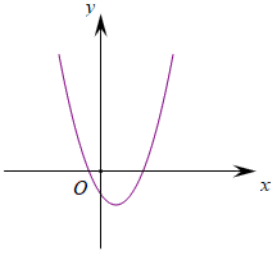
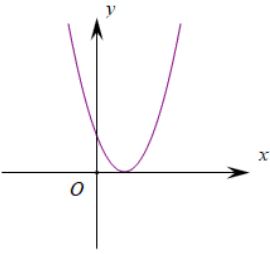
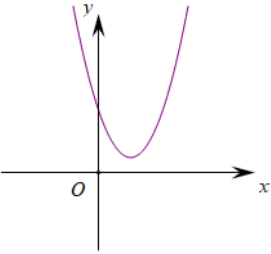


# 第3讲 二次函数与方程、不等式

## 一、二次函数与坐标轴交点

①二次函数与 $y$ 轴交点坐标：令\_\_\_\_\_，得\_\_\_\_\_，因此与 $y$ 轴交点坐标为\_\_\_\_\_

②二次函数与 $x$ 轴交点坐标：令\_\_\_\_\_，得\_\_\_\_\_，因此方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解可以看作函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 $x$ 轴交点的\_\_\_\_\_，交点的个数决定方程解的个数。

|             |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|             |  |  |  |
| 与 $x$ 轴交点个数 | _____                                                                             | _____                                                                              | _____                                                                               |
| 判别式         | _____                                                                             | _____                                                                              | _____                                                                               |
| 根的情况        | _____                                                                             | _____                                                                              | _____                                                                               |

 举个“栗子”

 栗子1

1. 抛物线 $y = x^2 - 3x + 2$ 与 $y$ 轴交点的坐标为( )。

- A. (0, 2)                      B. (1, 0)                      C. (2, 0)                      D. (0, -3)

 栗子2

2. 若抛物线 $y = 2x^2 - 3x - k$ 与 $x$ 轴没有交点，则 $k$ 的取值范围为( )。

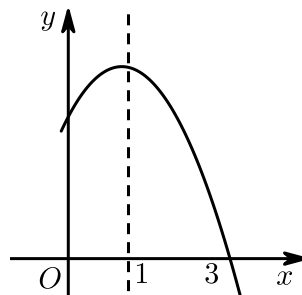
- A.  $k \leq -\frac{9}{8}$                       B.  $k < -\frac{9}{8}$                       C.  $k \geq -\frac{9}{8}$ 且 $k \neq 0$                       D.  $k > -\frac{9}{8}$ 且 $k \neq 0$

3. 已知函数 $y = (k - 3)x^2 + 2x + 1$ 的图象与 $x$ 轴有交点，则 $k$ 的取值范围是( )。

- A.  $k < 4$                       B.  $k \leq 4$                       C.  $k < 4$ 且 $k \neq 3$                       D.  $k \leq 4$ 且 $k \neq 3$

栗子3

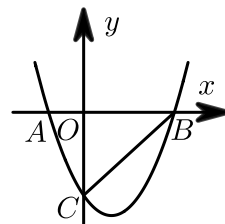
4. 已知二次函数  $y = -x^2 + 2x + m$  的部分图象如图所示，则关于  $x$  的一元二次方程  $-x^2 + 2x + m = 0$  的解为 \_\_\_\_\_ .



5. 已知二次函数  $y = x^2 - 3x + m$  ( $m$  为常数) 的图象与  $x$  轴的一个交点为  $(1, 0)$ ，则关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 3x + m = 0$  的两实数根是 ( ) .
- A.  $x_1 = 1, x_2 = -1$     B.  $x_1 = 1, x_2 = 2$     C.  $x_1 = 1, x_2 = 0$     D.  $x_1 = 1, x_2 = 3$

栗子4

6. 如图，二次函数  $y = x^2 - 2x - 3$  的图象与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，则下列说法错误的是 ( ) .



- A.  $AB = 4$     B.  $\angle OCB = 45^\circ$
- C. 当  $x > 3$  时， $y > 0$     D. 当  $x > 0$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小

栗子5

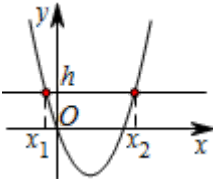
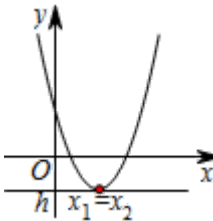
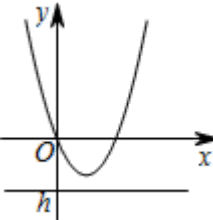
7. 根据下列表格中的对应值，判断一元二次方程  $x^2 - 4x + 2 = 0$  的解的取值范围是 ( ) .

| $x$            | 0 | 0.5  | 1  | 1.5   | 2  | 2.5   | 3  | 3.5  | 4 |
|----------------|---|------|----|-------|----|-------|----|------|---|
| $x^2 - 4x + 2$ | 2 | 0.25 | -1 | -1.75 | -2 | -1.75 | -1 | 0.25 | 2 |

- A.  $0 < x < 0.5$ ，或  $3.5 < x < 4$     B.  $0.5 < x < 1$ ，或  $3 < x < 3.5$
- C.  $0.5 < x < 1$ ，或  $2 < x < 2.5$     D.  $0 < x < 0.5$ ，或  $3 < x < 3.5$

## 二、二次函数与平行于 $x$ 轴直线交点

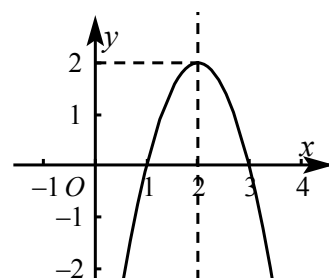
求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点：

| $ax^2 + bx + c - h = 0$<br>的判别式 $\Delta$ | 图象<br>(以 $a > 0$ 为例)                                                               | 与直线 $y = h$<br>的交点情况 | 一元二次方程根的情况   |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|
| $\Delta$ _____                           |   | 有 _____ 个交点          | 有 _____ 的实数根 |
| $\Delta$ _____                           |   | 有 _____ 个交点          | 有 _____ 的实数根 |
| $\Delta$ _____                           |  | _____                | _____ 实数根    |

 举个“栗”子

 栗子6

8. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示，根据图象可知：方程 $ax^2 + bx + c = k$ 有两个不相等的实数根，则 $k$ 的取值范围为 \_\_\_\_\_ ．



栗子7

9. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  图象上部分点的坐标满足下表：

|     |         |    |    |    |    |     |         |
|-----|---------|----|----|----|----|-----|---------|
| $x$ | $\dots$ | -3 | -2 | -1 | 0  | 1   | $\dots$ |
| $y$ | $\dots$ | -3 | -2 | -3 | -6 | -11 | $\dots$ |

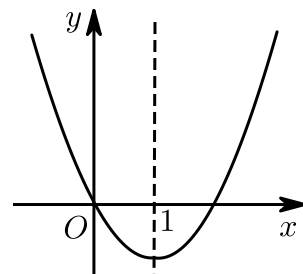
若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c - m = 0$  有两个不相等的实数根，则  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_ .

栗子8

10. 已知函数  $y = 3 - (x - m)(x - n)$ ， $m < n$ ，并且  $a, b$  ( $a < b$ ) 是方程  $3 - (x - m)(x - n) = 0$  的两个根，则实数  $m, n, a, b$  的大小关系可能是 \_\_\_\_\_ . (用 “<” 号连接)

独步天下1

11. 二次函数  $y = x^2 + bx$  的图象如图，对称轴为直线  $x = 1$ ，若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + bx - t = 0$  ( $t$  为实数) 在  $-1 < x < 4$  的范围内有解，则  $t$  的取值范围是 ( ) .



A.  $t \geq -1$

B.  $-1 \leq t < 3$

C.  $-1 \leq t < 8$

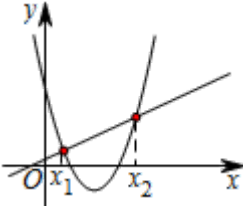
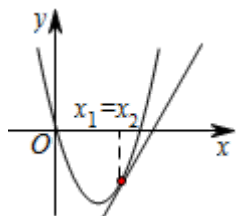
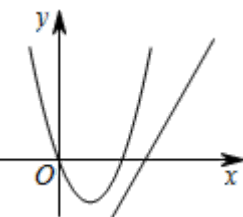
D.  $3 < t < 8$

### 三、二次函数与一次函数交点

求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点：

联立两个函数解析式，整理可得\_\_\_\_\_，方程的根即两个函数交点的横坐标；

由方程根的情况，确定二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与直线 $y = mx + n$ 位置关系

| $ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$<br>的判别式 $\Delta$ | 图象<br>(以 $a > 0$ 为例)                                                                | 与直线<br>$y = mx + n$<br>的交点情况 | 一元二次方程根的情况   |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------|
| $\Delta$ _____                               |    | 有 _____ 个交点                  | 有 _____ 的实数根 |
| $\Delta$ _____                               |   | 有 _____ 个交点                  | 有 _____ 的实数根 |
| $\Delta$ _____                               |  | _____                        | _____ 实数根    |

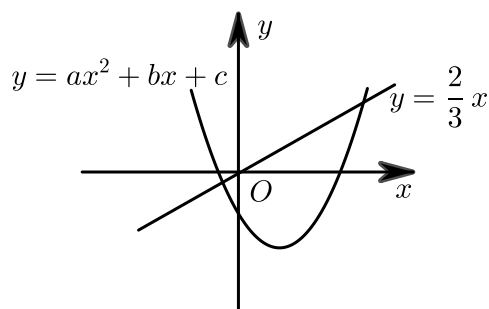
 举个“栗子”

 栗子9

12. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2$ 与直线 $y = 2x + 3$ 相交于 $A$ 、 $B$ 两点，已知点 $A$ 的坐标是 $(-1, 1)$ ，求点 $B$ 的坐标．

栗子10

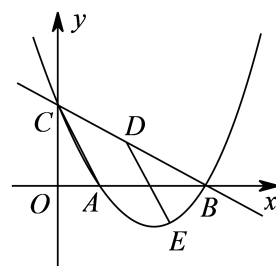
13. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  和正比例函数  $y = \frac{2}{3}x$  的图象如图所示，则方程  $ax^2 + \left(b - \frac{2}{3}\right)x + c = 0 (a \neq 0)$  的根的情况 ( ) .



- A. 两根都大于0  
B. 两根都等于0  
C. 两根都小于0  
D. 一根大于0，一根小于0

栗子11

14. 如图，抛物线  $y = a(x-1)(x-4)$  与  $x$  轴相交于点  $A$ 、 $B$  (点  $A$  在点  $B$  的左侧)，与  $y$  轴相交于点  $C$ ，点  $D$  在线段  $CB$  上 (点  $D$  不与  $B$ 、 $C$  重合)，过点  $D$  做  $CA$  的平行线，与抛物线相交于点  $E$ ，直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + 2$  .



- (1) 求点  $C$  的坐标和  $a$  的值 .  
(2) 当点  $D$  为  $BC$  的中点时，求  $DE$  的长 .  
(3) 在 (2) 的条件下，判断四边形  $CAED$  的形状，并加以证明 .

15. 已知抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0, a \neq c$ ) 与  $x$  轴交于点  $A(1, 0)$ , 顶点为  $B$ .

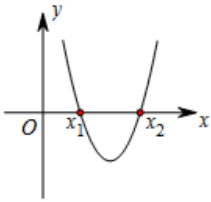
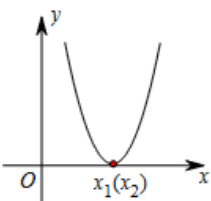
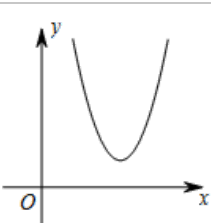
(1) 当  $a = 1, c = 3$  时, 求抛物线的顶点  $B$  的坐标.

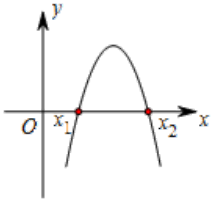
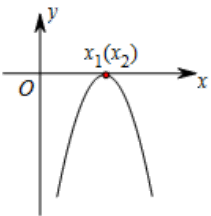
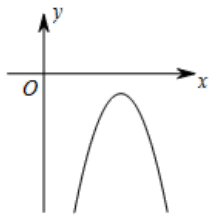
(2) 求抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴的另一个公共点的坐标 (用含  $a, c$  的式子表示).

(3) 若直线  $y_2 = 2x + m$  经过点  $B$  且与抛物线  $y_1 = ax^2 + bx + c$  交于另一点  $C\left(\frac{c}{a}, b + 8\right)$ , 求当  $x \geq 1$  时,  $y_1$  的取值范围.

## 四、根据函数图象求不等式的解集

### 1. “ $ax^2 + bx + c > 0$ ” 型不等关系

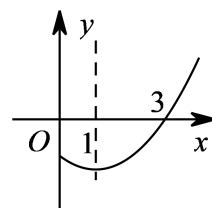
|         | 图象                                                                                  | 与 $x$ 轴的交点情况 | $ax^2 + bx + c > 0$<br>的解集 | $ax^2 + bx + c < 0$<br>的解集 |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------|----------------------------|----------------------------|
| $a > 0$ |  | 有 ____ 个交点   | _____                      | _____                      |
|         |  | 有 ____ 个交点   | _____                      | _____                      |
|         |  | ____ 交点      | _____                      | _____                      |

|         | 图象                                                                                | 与 $x$ 轴交点情况 | $ax^2 + bx + c > 0$<br>的解集 | $ax^2 + bx + c < 0$<br>的解集 |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------------|----------------------------|
| $a < 0$ |  | 有 ____ 个交点  | _____                      | _____                      |
|         |  | 有 ____ 个交点  | _____                      | _____                      |
|         |  | ____ 交点     | _____                      | _____                      |

🗨 举个“栗”子

栗子12

16. 如图是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的一部分，其对称轴为直线 $x = 1$ ，若其与 $x$ 轴一交点为 $B(3, 0)$ ，则由图象可知，不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集 \_\_\_\_\_ .



栗子13

17. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中，函数 $y$ 与自变量 $x$ 的部分对应值如表：

|     |     |    |   |   |   |   |     |
|-----|-----|----|---|---|---|---|-----|
| $x$ | ... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ... |
| $y$ | ... | 10 | 5 | 2 | 1 | 2 | ... |

则当 $y < 5$ 时， $x$ 的取值范围是 ( ) .

- A.  $x < 0$ 或 $x > 5$       B.  $0 < x < 5$       C.  $x < 0$ 或 $x > 4$       D.  $0 < x < 4$





18. 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象于 $x$ 轴的交点坐标分别为 $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ , 且 $x_1 < x_2$ , 图象上有一点 $M(x_0, y_0)$ 在 $x$ 轴下方, 对于以下说法:

① $b^2 - 4ac > 0$ ; ② $x = x_0$ 是方程 $ax^2 + bx + c = y_0$ 的解; ③ $x_1 < x_0 < x_2$ ; ④

$a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) < 0$ .

其中正确的是 ( ).

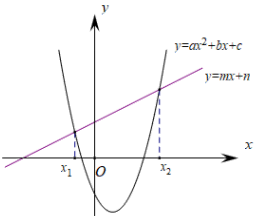
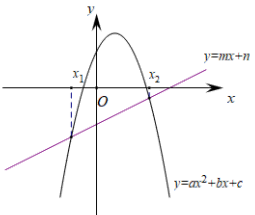
A. ①③④

B. ①②④

C. ①②③

D. ②③

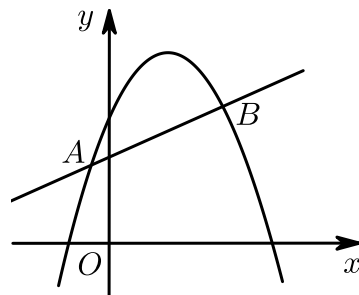
2. 物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ , 直线 $y_2 = mx + n (m > 0)$ 的不等关系

|         | 图象                                                                                  | 解集                                  |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| $a > 0$ |    | $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 _____ |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 _____  |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 _____ |
| $a < 0$ |  | $ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 _____ |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c = mx + n$ 的解为 _____  |
|         |                                                                                     | $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的解集为 _____ |

举个“栗”子

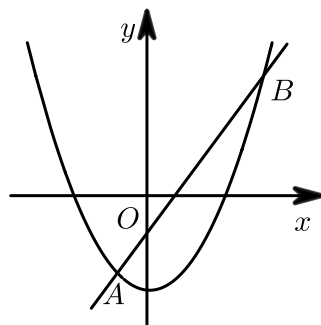
栗子14

19. 如图, 直线 $y = mx + n$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 $A(-1, p)$ ,  $B(4, q)$ 两点, 则关于 $x$ 的不等式 $mx + n > ax^2 + bx + c$ 的解集是 \_\_\_\_\_.



栗子15

20. 如图，抛物线 $y = ax^2 + c$ 与直线 $y = mx + n$ 交于 $A(-1, p)$ ， $B(3, q)$ 两点，则不等式 $ax^2 + mx + c > n$ 的解集是 \_\_\_\_\_ 。



栗子16

21. 直线 $y = mx + n$ 和抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 在同一坐标系中位置如图所示，那么不等式 $mx + n < ax^2 + bx + c < 0$ 的解集是 \_\_\_\_\_ 。

